MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

LUNEDÍ 28 SETTEMBRE 2015 — LEZIONE n°1 (BENNATI)

Docenti: Stefano Bennati
Riccardo Barsotti
Luca Tapellaleone
Paolo Ficarelli
Danila Aita

Introduciamo subito un elemento importante della scienza delle costruzioni: LA TRAVE

Questa nostra Trave può essere collocata su 3 appoggi come primo esempio

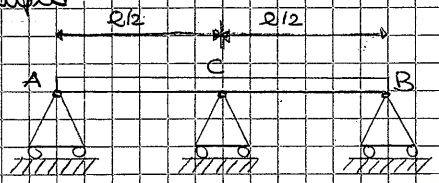


FIG. 1

C è il punto intermedio come indicato in Fig. 1

Questo tipo di vincolo consente lo spostamento orizzontale, ma impedisce gli spostamenti verticali in ambo i versi

Il carrello a contatto con la trave permette la rotazione attorno ad esso

Sostanzialmente questi vincoli tolgono 1 grado di libertà al sistema che ricordiamo, nel piano ne possiede 3 (VINCOLO SEMPLICE)

Si definisce PRESTAZIONE CINEMATICA del vincolo ad esempio in A l'insieme dei movimenti ammessi da quel particolare vincolo

ESEMPIO in A

$\underline{u}_A = u_A \underline{i} + v_A \underline{j}$

$$\begin{cases} \Phi_A = \forall \\ u_A = \forall \\ v_A = 0 \end{cases}$$ → Significa che sono consentiti tutti i movimenti lungo x e la rotazione

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

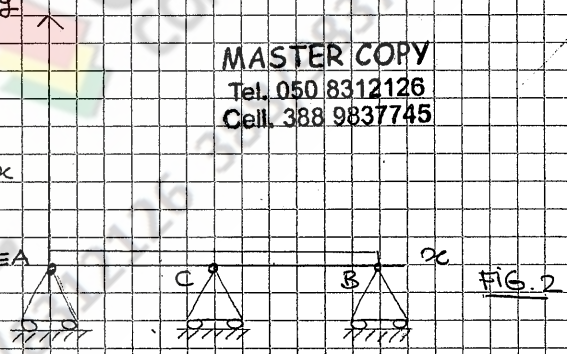


FIG. 2

Supponiamo adesso di caricare la struttura (l'opera è assoggetta a delle azioni esterne)

Questo carico lo applichiamo in corrispondenza di B

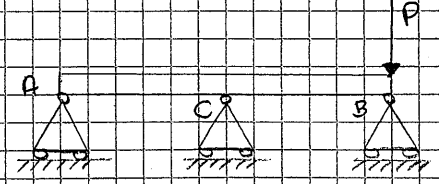


FIG. 3

Le domande che ci poniamo in queste circostanze sono

"La trave sta in equilibrio?"

"Quanto valgono le reazioni vincolari?"

↓

Devono essere in grado di mantenere l'equilibrio

Un vincolo si dice PERFETTO quando non ha attriti e non è cedevole

Quando un vincolo è perfetto esso reagisce solo con una forza reattiva normale alla superficie d'appoggio pensata però priva di movimento Ψ_α con $\alpha = A, B, C$ in questo caso

Il sistema di forze reattive è dunque descritto da

$$\{\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C\}$$

Dalla fisica e dalla meccanica razionale sappiamo che un corpo si trova in equilibrio se la risultante delle forze agenti su di esso è nulla

e anche STATICAMENTE EQUIVALENTE A 0

Eq. cardinali della statica

$$\begin{cases} R_{Ox}^{(e)} = 0 & \text{che significa } 0=0 \text{ (IDENTITÀ)} \quad (\text{RISULTANTE UNICO } x) \\ R_y^{(e)} = 0 \Rightarrow \Psi_A + \Psi_B + \Psi_C - P = 0 & \\ H_z^{(e)} = 0 \rightarrow \Psi_A + \frac{1}{2}\Psi_C = 0 & (\text{con polo in } B) \quad (\text{MOMENTO RISULTANTE NULLO}) \end{cases}$$

Chiamando $\Psi_C = x$ otteniamo IMPORTANTISSIMO!!

$$\begin{cases} \Psi_C = x \\ \Psi_A = -\frac{x}{2} \\ \Psi_B = P - \frac{x}{2} \end{cases}$$

Questa scelta di questo tipo risolve il problema di equilibrio $\rightarrow \infty^1$ soluzioni

Questo sistema algebrico è indeterminato

Quando però un sistema statico ammette infinite soluzioni staticamente possibili si dice che è

STATICAMENTE NON DETERMINATO

Questo non è accettabile in un contesto come questo

La risposta al problema va oltre i concetti di meccanica razionale perché abbiamo bisogno di conoscere univocamente le reazioni vincolari

Ricordiamo che esiste il teorema di Rouché-Capelli che permette di determinare la forma delle soluzioni di un sistema

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Ritornando dunque all'esercizio proposto, il problema dove nasce?

NOTA BENE

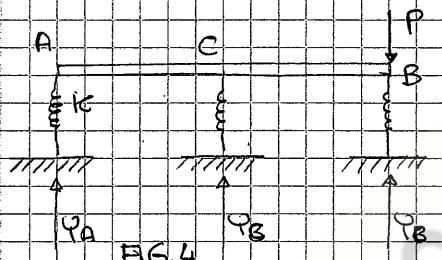
Abbiamo trascurato gli spostamenti che si vengono ad avere dovuti alla forza dello applicato

le strutture si deformano

↳ ogni struttura subisce dei piccoli spostamenti anche se possono risultare microscopici ad occhio nudo

Si può supporre che gli spostamenti maggiori si abbiano nei vincoli, e tali vincoli siano elastici

Per rappresentare uno schema più corretto allora



Non sono appoggi perfetti ma sono cedevoli

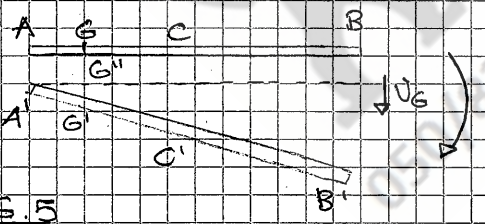
Posso immaginare che hanno una cedevolezza eccessiva

FIG.4

Consideriamo una configurazione di partenza C_0; dopo una piccola deformazione si ottiene una nuova configurazione in cui però continuano a valere le equazioni della statica di C_0

Le travi ci concedono una rotazione ϑ e uno spostamento verticale δ

Per quanto detto prima si può supporre che $\delta \ll l$ dove l è la lunghezza della trave, e $\vartheta \ll 1$



Siamo interessati a valutare lo spostamento di una singola sezione G in funzione di x

$v_G(x) = v_G(-j)$

FIG.5

Si ottiene che $v(x) \cong \delta + \vartheta x$, relazione vera per $\vartheta \ll 1$

↳ spostamento verticale della generica sezione

Questo perché $\overline{G''G'}$ in FIG.5 è anche $x \operatorname{tg}\vartheta$ e $\operatorname{tg}\vartheta$ per piccoli valori, sviluppato con Taylore vale ϑ

È una forma approssimata, non è quella vera, ma è una forma accettabile

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Quindi possiamo scrivere

$v_C = \delta + \frac{\ell}{2}\vartheta$ OSSERVAZIONE IMPORTANTE

$v_A = \delta$ Sono lineari in δ che in ϑ

$v_B = \delta + \ell\vartheta$

Se ora penso alla cedevolezza elastica introduco la costante elastica k, che immagino uguale per TUTTI e 3

Utilizzando le leggi di Hooke so che per molte condizioni di carico, i corpi si comportano elasticamente

$$\begin{cases} y_A = k v_A \\ y_B = k v_B \\ y_C = k v_C \end{cases}$$

Dunque risolvendo le equazioni di equilibrio sfruttando quelle sopra e le forze di v_A, v_B, v_C in funzione di δ e ϑ si ottiene

$$k\delta + \frac{1}{2}k\left(\delta + \frac{\ell}{2}\vartheta\right) = 0 \Rightarrow \boxed{3\delta + \frac{\ell}{2}\vartheta = 0} \rightarrow 1^a \text{ equazione}$$

Sfruttando l'altra

$$\boxed{-\frac{\ell}{2}\vartheta + \frac{3}{2}\ell\vartheta = \frac{P}{k}} \Rightarrow \ell\vartheta = \frac{P}{k} \Rightarrow \vartheta = \frac{P}{k\cdot\ell}$$

$\rightarrow 2^a$ equazione

$$\delta = -\frac{P}{6k}$$

Dunque abbiamo trovato i valori di δ e ϑ, ora mi resta da sostituirli

$v_A = \delta = -\frac{P}{6k}$ quindi si sposta verso l'alto

C e B verso il basso e i valori si ricavano analogamente

Per trovare le forze reattive basta moltiplicare ogni spostamento per k

avremo in A $\rightarrow -\frac{P}{6}$

in B $\rightarrow \frac{P}{3}$

in B $\rightarrow \frac{5}{6}P$

Quest'equazione come detto precedentemente era lineare

UNICITÀ E LINEARITÀ non sono aspetti marginali

↳ senza questa non si può procedere

↳ senza questa siamo nei guai (non si può neanche sfruttare il principio di sovrapposizione)

Sotto quali ipotesi siamo giunti a queste conclusioni?

1 - gli appoggi sono cedevoli

2 - sono piccoli spostamenti (le eq. della statica valgono in Co)

3 - stiamo supponendo elasticità - Hooke

Tutto questo è detto METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Cosa succede se cambiamo ipotesi?

Può per esempio capitare che la trave sia deformabile e gli appoggi cedevoli

La soluzione cambia

Supponiamo di infilare la trave in un cassino e lo colmo di asfalto (FIG. 6)

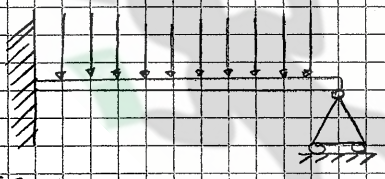


FIG. 6

E' di nuovo staticamente non determinato

Si può ottenere la soluzione come visto ragionamento